التمرين الأول (نقطتان) :

1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{2x}-4e^{x}+3=0$	0.5
ب) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$	0.5
ج) احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$	0.5
2) بين أن المعادلة $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حلا على المجال $[-1,0]$	0.5

التمرين الثاني (4 نقط):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ لكل n من IN

1) احسب u_1	0.25
2) بين بالترجع أن لكل n من IN ، $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$	0.5
3) أ) بين أن لكل n من IN ، $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$	0.5
ب) استنتج رتابة المتتالية (u_n)	0.5
4) أ) بين أن لكل n من IN ، $0<u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)	0.75
ب) نضع $v_n=\ln(3-2u_n)$ لكل n من IN ، احسب $\lim v_n$	0.5
5) أ) تحقق من أن لكل n من IN ، $\dfrac{1}{u_{n+1}}-1=3\left(\dfrac{1}{u_n}-1\right)$	0.5
ب) استنتج u_n بدلالة n لكل n من IN	0.5

التمرين الثالث (5 نقط) :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$	0.75
2) نعتبر العددين العقديين $a=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $b=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	
أ) اكتب العدد a على الشكل الجبري .	0.25
ب) تحقق أن $\overline{a}b=\sqrt{3}$	0.5
في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و $\overline{a}$	
3) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بتحاكٍ h مركزه O يتم تحديد نسبته.	0.5
4) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$	
أ) اكتب z' بدلالة z و a	0.5
ب) ليكن d لحق النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ، بين أن $d=a+1$	0.25
ج) لتكن I النقطة التي لحقها العدد 1 ، بين أن $ADIO$ معين .	0.5
5) أ) تحقق من أن $d-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ و استنتج عمدة للعدد $d-b$	0.75

ب) اكتب العدد $b-1$ على الشكل المثلثي .	0.5
ج) استنتج قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)$	0.5

المسألة (9 نقط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(0)=0$ و $f(x)=2x\ln x-2x$ إذا كان $x>0$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0	0.5
2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0.5
ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .	0.5
3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .	0.75
ب) احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$	0.5
ج) ضع جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$	0.5
4) أ) حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلتين $f(x)=0$ و $f(x)=x$	0.5
ب) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $e^{\frac{3}{2}}\simeq4.5$)	1
5) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{1+e^2}{4}$	0.5
ب) استنتج : $\int_1^e f(x)dx$	0.5
6) أ) حدد القيمة الدنيا للدالة f على المجال $]0,+\infty[$	0.25
ب) استنتج أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، $\ln x\geq\dfrac{x-1}{x}$	0.5
7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$	
أ) بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .	0.5
ب) أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة g^{-1}	0.75
8) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases}h(x)=x^3+3x & ;\ x\leq0\\ h(x)=2x\ln x-2x & ;\ x>0\end{cases}$	
أ) ادرس اتصال الدالة h في النقطة 0	0.5
ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة h على اليسار في 0 و أول النتيجة هندسيا .	0.5
ج) هل الدالة h قابلة للاشتقاق في 0 ؟ علل جوابك.	0.25

تصحيح الامتحان الوطني 2020 - 2021

- الدورة العادية -

التمرين الأول:

1 - أ) نحل في $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

نضع: $t = e^x$ اذن: $t^2 = e^{2x}$

ومنه:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

و $\Delta = 16 - 4(3) = 16 - 12 = 4 > 0$

حلان:

$t_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$t_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

اذن: $t = t_1$ أو $t = t_2$

$e^x = 1$ أو $e^x = 3$

$x = \ln(1) = 0$ أو $x = \ln(3)$

مجموعة الحلول هي:

$$S = \{0 ; \ln(3)\}$$

2 - ب) نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$$

حسب ما سبق:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 1)(e^x - 3)$$

ولدينا: $e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq \ln(1) = 0$

$e^x - 3 \geq 0 \iff x \geq \ln(3)$

اذن:

x		0		$\ln(3)$	
$e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$e^{2x} - 4e^x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

اذن مجموعة الحلول هي المجال: $[0 ; \ln(3)]$

---

1 - ج) حساب $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

مباشرة نجد "$\frac{1-4+3}{1-1}$" = "$\frac{0}{0}$" ش.غ.م

لدينا: $e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1^2 = (e^x - 1)(e^x + 1)$

و $e^{2x} - 4e^x + 3 = t^2 - 4t + 3 \quad (t = e^x)$

$= (t-1)(t-3)$

$= (e^x - 1)(e^x - 3)$

اذن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(e^x - 3)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

2) $e^{2x} + e^x + 4x = 0$

$x \in [-1 ; 0]$

الدالة $f : x \mapsto e^{2x} + e^x + 4x$ متصلة على المجال $[-1 ; 0]$

ولدينا: $f(0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0$

$f(-1) = e^{-2} + e^{-1} - 4$

$= \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4$

نعلم أن: $e \simeq 2{,}7 > 1$ ومنه $e^2 > 1$

اذن: $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} < 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4 < 2 - 4 = -2$

اذن: $f(-1) < 0$

(ملاحظة: يمكن استعمال الآلة الحاسبة)

اذن: $f(-1) \times f(0) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $[-1 ; 0]$.

Scanné avec CamScanner

التمرين الثاني:

$U_0 = \frac{1}{2}$

$(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = \frac{U_n}{3-2U_n}$

1) $U_1 = \frac{U_0}{3-2U_0} = \frac{\frac{1}{2}}{3-\frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) من أجل $n=0$ لدينا:

$0 < U_0 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$

وهذا صحيح.

ليكن $n \ge 0$

نفترض أن: $0 < U_n \le \frac{1}{2}$

ونبين أن: $0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

بما أن: $U_n \le \frac{1}{2}$ فإن: $2U_n \le 1$

إذن: $-2U_n \ge -1$

$\Rightarrow 3 - 2U_n \ge 3 - 1 = 2$

إذن:

$\left(3-2U_n > 0 \text{ و } \frac{1}{3-2U_n} \le \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3-2U_n}$ و $\frac{U_n}{3-2U_n} \le \frac{U_n}{2}$

(لأن: $U_n > 0$)

$\Rightarrow 0 < \frac{U_n}{3-2U_n}$ و $\frac{U_n}{3-2U_n} \le \frac{1}{2}$

(لأن: $\frac{U_n}{2} = \frac{1}{2} \times U_n \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$)

وبالتالي: $0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$ وحسب مبدأ الترجع:

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 < U_n \le \frac{1}{2}$

2

طريقة أخرى:

$\frac{1}{U_{n+1}} = \frac{3-2U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - \frac{2U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - 2$

نعلم أن: $0 < U_n \le \frac{1}{2}$ إذن: $\frac{1}{U_n} \ge 2$

ومنه: $\frac{3}{U_n} \ge 6$ إذن: $\frac{3}{U_n} - 2 \ge 4$

وبالتالي:

$\frac{1}{U_{n+1}} > 0$ و $\frac{1}{U_{n+1}} \ge 2$

(لأن $4 \ge 2$)

أي أن: $0 < U_{n+1}$ و $U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

ومنه: $\boxed{0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}}$

ملاحظة: ينبغي أن نبرهن على أن:

$0 < U_{n+1}$ و $U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

لا ينبغي نسيان إحدى المتفاوتتين.

3-أ) نبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2}$

طريقة رقم 1:

نستعمل البرهان بالتكافؤ:

ليكن n من $\mathbb{N}$.

العبارة:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow U_{n+1} \le \frac{U_n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{U_n}{3-2U_n} \le \frac{U_n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3-2U_n} \le \frac{1}{2}$ (لأن: $U_n > 0$)

$\Leftrightarrow 2 \le 3 - 2U_n$ (لأن: $3-2U_n>0$ و $U_n \le \frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow -1 \le -2U_n$

$\Leftrightarrow 1 \ge 2U_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge U_n$

وهذا صحيح لأن: $0 < U_n \le \frac{1}{2}$

وبالتالي العبارة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2}$ صحيحة لكل n

طريقة 2: ليكن n من IN

لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{u_n}\left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3-2u_n} - \frac{1}{2} = \frac{-1+2u_n}{2(3-2u_n)}$$

نعلم أن: $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ اذن: $\begin{cases} 3-2u_n \geqslant 0 \\ -1+2u_n \leqslant 0 \end{cases}$

ومنه: $\frac{-1+2u}{2(3-2u_n)} \leqslant 0$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}).\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$

3-ب) استنتاج الرتابة: ليكن $n \in \mathbb{N}$

نعلم مما سبق أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$

اذن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (لأن: $\frac{1}{2} \leqslant 1$)

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} \leqslant u_n$

ومنه (u_n) تناقصية.

4-أ) نبين أن: $0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 1:

باستخدام السؤال 3-أ):

نعلم أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح n.

اذن العبارة صحيحة بالخصوص من أجل: 0 ; 1 ; 2 ; ...... ; $(n-1)$ أي أن:

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} \leqslant \frac{1}{2} \\ \text{و } \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \text{و } \frac{u_3}{u_2} \leqslant \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \text{و } \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

عدد الأسطر هو: $(n-1)+1 = n$

نضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف فنحصل على الجداء:

3

$$\frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \ldots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ من العوامل}}$$

اذن: $\frac{u_n}{u_0} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(لأن: $u_0 = \frac{1}{2}$)

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 2:

العبارة $0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ صحيحة

من أجل $n=0$ لدينا:

$0 < u_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$

وهذا صحيح.

ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفترض أن: $0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعلم أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$

اذن: $\Rightarrow u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$

$\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (حسب ف الترجع)

$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

اذن: حسب مبدأ الترجع: $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

حساب $\lim u_n$:

نعلم أن $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن: $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

اذن: $\lim u_n = 0$

4

التمرين الثالث:

1) $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\Delta = 3 - 4 = -1 < 0$

حلان عقديان مترافقان:

$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

مجموعة الحلول هي: $S = \{z_1 ; z_2\}$

2) $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$

2-أ) $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

اذن: $\boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}$

2-ب) التحقق:

$\bar{a}b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3}\,\bar{a}a = \sqrt{3}|a|^2 = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$

(لأن: $|a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1$)

ملاحظة: يمكن الحساب عن طريق النشر المعتاد ونجد $\sqrt{3}$.
أو نلاحظ من البداية أن: $b = \sqrt{3}a$
اذن: $\bar{a}b = \bar{a}\sqrt{3}a = \sqrt{3}\,\bar{a}a = \sqrt{3}$

3) تحديد k نسبة التحاكي h.

نعلم أن صيغة التحاكي h هي:

$z' - z_0 = k(z - z_0)$

بما أن: $h(A) = B$ فإن:

$z_B = k\,z_A$

اذن: $b = ka$

4-ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = \ln(3 - 2u_n)$

نعلم أن: $\lim u_n = 0$ اذن:

$\lim 3 - 2u_n = 3 - 0 = 3$

وبما أن: $\ln$ دالة متصلة فإن:

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(3 - 2u_n)$

$= \ln(3)$

5-أ) التحقق:

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3 - 2u_n - u_n}{u_n}$

$= \frac{3 - 3u_n}{u_n} = 3\left(\frac{1 - u_n}{u_n}\right) = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

5-ب) استنتاج u_n بدلالة n:

نضع: $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$

حسب 5-أ) لدينا:

$w_{n+1} = 3w_n$

اذن: (w_n) هندسية أساسها 3 وحدها:

$\forall n \in \mathbb{N};\ w_n = 3^n w_0 = 3^n\left(\frac{1}{u_0} - 1\right)$

$w_n = 3^n(2 - 1) = 3^n$

وبالتالي:

$\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1 + 3^n \Rightarrow u_n = \frac{1}{1+3^n}$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}):\ u_n = \frac{1}{1+3^n}$

5

و $DI = |1-(a+1)| = |-a| = |a| = 1$

اذن فهو معين .

5-i) التحقق :

لدينا :

$$d-b = 1+a-b$$
$$= 1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}-3}{2}+i\frac{(1-\sqrt{3})}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$$

استنتاج : $\arg(d-b)$

حسب ماسبق لدينا :

$$\arg(d-b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right) [2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\arg(1-i) [2\pi]$$

بما أن : $\frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$ فإن : $\arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0 [2\pi]$

ولدينا : $|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

اذن : $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}\right]$$

اذن : $\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

وبالتالي :

$$\boxed{\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]}$$

5-ب) الشكل المثلثي للعدد : $1-b$:

$$1-b = 1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= (-1)\times\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= [1;\pi]\times\left[1;\frac{\pi}{3}\right] = \left[1\times1;\pi+\frac{\pi}{3}\right]$$

اذن : $1-b = \left[1; \frac{4\pi}{3}\right]$

. $b\bar{a} = ka\bar{a}$

ومنه :

ونعلم أن : $b\bar{a} = \sqrt{3}$ و $a\bar{a} = |a|^2 = 1$

اذن : $\sqrt{3} = k\times1$ ومنه $\boxed{k=\sqrt{3}}$

بما أن $k \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد تحاكٍ h مركزه O ويحول A إلى B ونسبته $\sqrt{3}$.

4-i) R دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أي : $z'-z_A = e^{i\pi/2}(z-z_A)$

ومنه :

$$\boxed{z' = a+e^{i\pi/2}(z-a)}$$

4-ب) D هي صورة C بالدوران R

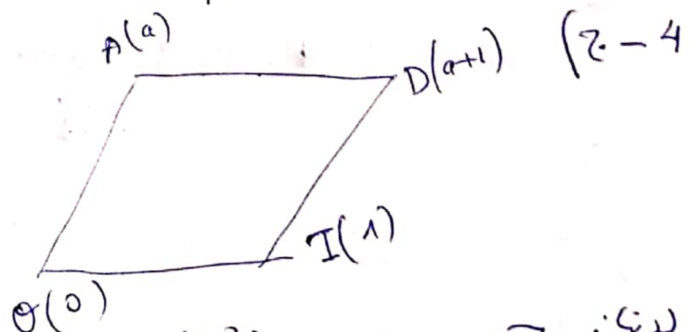
اذن :

$$d = a+e^{i\frac{\pi}{2}}(\bar{a}-a)$$
$$= a+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= a+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$
$$= a+i\left(-i\frac{2}{2}\right) = a+i(-i) = a+1$$

اذن :

$$\boxed{d = a+1}$$

4-ج)



لدينا :

$$aff(\vec{AD}) = a+1-a = \boxed{1}$$
$$aff(\vec{OI}) = 1-0 = \boxed{1}$$

اذن :

$$\boxed{\vec{AD} = \vec{OI}}$$

وبالتالي $ADIO$ متوازي أضلاع

وله ضلعان متتابعان متقايسان هما $[AD]$ و $[DI]$ لأن :

$$AD = |d-a| = |a+1-a| = 1$$

5-ج) استنتاج قياس $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD})$ ،

نعلم أن: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)$

اذن: $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}) \equiv \arg(d-b)-\arg(1-b)\ [2\pi]$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)\ [2\pi]$$

لأن: $\arg(1-b) \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ سؤال 5-ب)

و $\arg(d-b) = -\frac{\pi}{4}$ حساب 5-أ)

اذن: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{19\pi}{12}\ [2\pi]$

ملاحظة: لدينا: $-\frac{19\pi}{12}+2\pi = \frac{5\pi}{12}$

اذن: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

هو أيضا إجابة صحيحة.

المسألة:

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln(x) - 2x \ ; \ x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) اتصال f في 0 على اليمين،

لدينا: $f(0)=0$

نعلم أن: $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ اذن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 2\times 0 = 0 = f(0)$$

ومنه f متصلة في 0 على اليمين،

2-أ) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2\ln(x) - 2\right)$

$$= +\infty \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$)

2-ب) $\frac{f(x)}{x} = 2\ln(x) - 2$

اذن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

تأويل هندسي:

(C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

3-أ) حساب $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2\ln(x) - 2$

$$= \boxed{-\infty}$$

لأن: $\lim_{x\to -\infty} \ln(x) = -\infty$

تأويل هندسي:

لدينا: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

اذن: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

ومنه (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأسفل ↓ في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$ (أصل المعلم).

3-ب) f ق.ش على $]0,+\infty[$

ولدينا، $(\forall x>0);\ f'(x) = \left(2x\ln(x) - 2x\right)'$

$$= (2x)'\ln(x) + 2x\ln'(x) - (2x)'$$

$$= 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} - 2$$

$$= 2\ln(x)$$

اذن: $(\forall x>0);\ f'(x) = 2\ln(x)$

3-ج) جدول تغيرات f:

7

ملاحظة: p_1: $x=e$ هو حل المعادلة $f(x)=0$ اذن $(\mathcal{C})$ يقطع (Ox) في $x=e$

p_2: $x=e^{3/2}$ هو حل المعادلة $f(x)=x$

يعني: $f(e^{3/2})=e^{3/2}$

حيث: $e^{3/2}\simeq 4{,}5$

p_3: $f'(1)=0$ اذن $(\mathcal{C})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة: $A(1;-2)$

(لأن: $f(1)=-2$)

5 - أ) حساب: $\int_1^e x\ln(x)\,dx$

بالإجراء نضع:

$$\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x \end{cases} : \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

اذن:

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$=\frac{e^2\ln(e)}{2}-\frac{1}{2}\ln(1)-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2e^2-e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

اذن:

$$\boxed{\int_1^e x\ln(x)\,dx=\frac{1+e^2}{4}}$$

5 - ب) استنتاج: $\int_1^e f(x)\,dx$

لدينا:

$$\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e 2x\ln(x)-2x\,dx$$

$$=2\int_1^e x\ln(x)\,dx-\int_1^e 2x\,dx$$

$$=2\left(\frac{1+e^2}{4}\right)-[x^2]_1^e \quad \text{(محاسبة نعوض)}$$

$$=\frac{1+e^2}{2}-(e^2-1)=\frac{1+e^2}{2}-\frac{2e^2-2}{2}$$

$$=\boxed{\frac{3-e^2}{2}}$$

لدينا: $f'(x)=2\ln(x)$

و $\ln(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

اذن:

x	0		1		
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	-2	↗	$+\infty$

4 - أ) ليكن $x\in]0,+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x\ln(x)=2x$$

$$\Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e$$

اذن حل المعادلة $f(x)=0$

هو: $\boxed{x=e}$

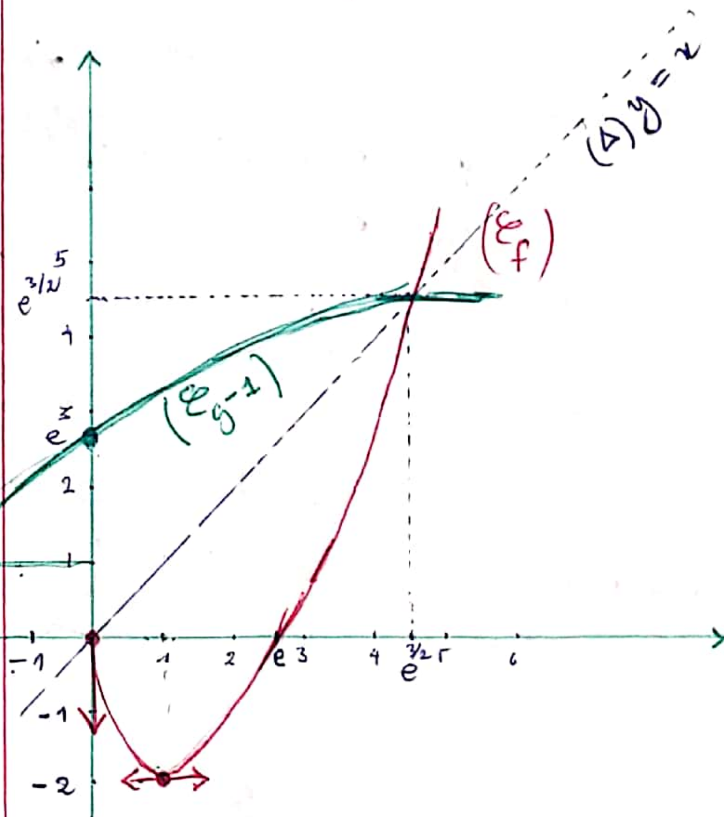
حل المعادلة: $f(x)=x$

$$f(x)=x \Leftrightarrow 2x\ln(x)-2x=x$$

$$\Leftrightarrow 2x\ln(x)=3x \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{3}{2}$$

الحل هو: $\boxed{x=e^{3/2}}$

4 - ب) انشاء $(\mathcal{C})$:



8

8) $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x \ ; \ x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln(x) - 2x \ ; \ x > 0 \end{cases}$

8أ) لدينا:

$\lim_{x \to 0^<} h(x) = \lim x^3 + 3x$

$= 0 = h(0)$

إذا: h متصلة في 0 على اليسار

ولدينا:

$\lim_{x \to 0^>} h(x) = \lim_{x \to 0^>} 2x\ln(x) - 2x$

$= 0 = h(0)$

إذا: h متصلة على اليمين في 0

بما أن h متصلة على اليمين وعلى اليسار في 0 فإنها متصلة في 0.

8-ب) قابلية الاشتقاق في 0 على اليسار.

لدينا:

$\forall x \leq 0 : \ h(x) = x^3 + 3x$

$x \mapsto x^3 + 3x$ دالة حدودية.

إذن فهي ق.ش على $\mathbb{R}$

وبالخصوص في 0 على اليسار

ومنه h ق.ش في 0 على اليسار

لدينا: $h'(x) = 3x^2 + 3$

إذا: $h'_g(0) = 3$

التأويل الهندسي: $(\mathcal{C}_h)$ يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$ معادلته:

$\begin{cases} y = h'_g(0)(x - 0) + h(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$

أي:

$\begin{cases} y = 3x \\ x \leq 0 \end{cases}$

معادلة نصف المماس ليست مطلوبة وفقط للاستفادة

8-ج) h غير ق.ش يمينا في 0.

التعليل: $\forall x > 0 : \ h(x) = f(x)$

f غير ق.ش في 0 (حسب سؤال 3-أ) على اليمين: إذا h كذلك.

ومنه h غير ق.ش في 0.

* * *

6-أ) حسب جدول تغيرات f

القيمة الدنيا لـ f على $]0, +\infty[$ هي: $f(1) = -2$.

6-ب) الاستنتاج:

بما أن: -2 قيمة دنيا لـ f على $]0,+\infty[$

فإنه لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا:

$f(x) \geq -2 \Rightarrow 2x\ln(x) - 2x \geq -2$

$\Rightarrow 2x\ln(x) \geq 2x - 2$

$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2x-2}{2x}$ (لأن: $x>0$)

$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2(x-1)}{2x}$

إذن:

$(\forall x \in]0,+\infty[) \quad \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$

7) لتكن g قصور f على $[1,+\infty[$.

7-أ) g متصلة على $[1,+\infty[$.

و g تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$.

إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1}.

g^{-1} معرفة على المجال:

$J = g([1+\infty[) = f([1+\infty[)$

$= [f(1); \lim_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [-2, +\infty[$

7-ب) إنشاء منحنى g^{-1}.

أنظر الشكل الآتي:

$(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم:

$(\Delta) : \ y = x$

ملاحظة

$(1,-2) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (-2,1) \in (\mathcal{C}_{g^{-1}})$

$(e,0) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (0,e) \in (\mathcal{C}_{g^{-1}})$

$D_{g^{-1}} = [-2 ; +\infty[$